Вступительная работа по математике в 8 класс. 7 апреля 2019 г.

Часть А

Вариант 1

А1. (1 балл) При каком значении m выражение $3m+4$ на 13 больше значения выражения $m+3$?

Ответ: 6.

Решение. По условию, $3m+4-13=m+3$, откуда $m=6$.

А2. (1 балл) Найдите значение выражения

$(a-b)^2+(3a-b)(b+3a)$ при $a=\dfrac{3}{5}$, $b=3$.

Ответ: 0.

Решение.

$(a-b)^2+(3a-b)(b+3a)=a^2-2ab+b^2+9a^2-b^2=10a^2-2ab=2a(5a-b)=0$ при $a=\dfrac{3}{5}$, $b=3$.

А3. (1 балл) Имеется два куска сплава олова и свинца. Первый, массой 300 г, содержит 60% олова. Второй содержит 40% олова. Сколько граммов от второго куска надо добавить к первому, чтобы получить сплав с содержанием олова 56%?

Ответ: 75 г.

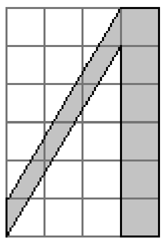
Решение. В первом куске сплава содержится $\dfrac{300\cdot 60}{100}=180$ г олова. Пусть от второго куска требуется добавить к первому x г сплава. Масса олова в этом куске равна $0{,}4x$ г. Масса олова в новом сплаве будет равна $(300+x)\cdot 0{,}56$ или $180+0{,}4x$.

Получаем: $(300+x)\cdot 0{,}56=180+0{,}4x$, откуда $x=75$ г.

А4. (1 балл) Вычислите: $\dfrac{(6^4)^2}{4^4\cdot 9^5}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

Решение. $\dfrac{(6^4)^2}{4^4\cdot 9^5}=\dfrac{(2^4\cdot 3^4)^2}{(2^2)^4\cdot (3^2)^5}=\dfrac{2^8\cdot 3^8}{2^8\cdot 3^{10}}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$.



А5. (1 балл) Площадь одной клеточки равна 1 см^2. Найдите площадь буквы *Л* (см. рис.).

Ответ: 9.

Решение. Два незакрашенных на рисунке треугольника составляют прямоугольник со сторонами 3 и 5 см, поэтому площадь буквы Л равна $4\cdot 6-3\cdot 5=24-15=9$ см^2.

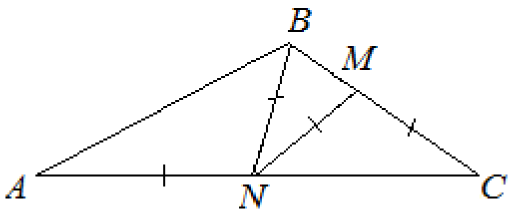
А6. (1 балл) Чемпион и новичок соревновались в беге на 5 км. Когда чемпион добежал до финиша, новичку оставалось бежать ещё 1 км. На какое расстояние нужно отодвинуть место старта чемпиона, чтобы спортсмены прибежали к финишу одновременно? Ответ запишите в метрах.

Ответ: 1250 м.

Решение. Чемпион пробегает 5 км, пока новичок пробегает 4 км, значит его скорость в $5:4=1{,}25$ раз больше. Чтобы новичок пробежал оставшийся километр, чемпиону надо пробежать 1,25 км.

А7. (1 балл) В треугольнике ABC на стороне BC отмечена точка M, а на стороне AC – точка N. Известно, что $MC=MN=BN=AN$ и $\angle C=40^0$. Найдите $\angle A$.

Ответ: 30^0.



Решение. ΔMNC – равнобедренный, поэтому $\angle MNC=\angle C=40^0$.

$\angle BMN$ – внешний угол ΔMNC, значит, $\angle BMN=40^0+40^0=80^0$. В равнобедренном треугольнике NBM: $\angle NBM=80^0$, $\angle BNM=20^0$.

$$\angle BNA=180^0-\angle CNM-\angle MNB=180^0-40^0-20^0=120^0,$$

поэтому в равнобедренном треугольнике $ABN:\angle NAB=\dfrac{180^0-120^0}{2}=30^0$.

А8. (1 балл) Известно, что $\dfrac{5x+y}{3x-y}=\dfrac{11}{5}$. Найдите $\dfrac{x^3}{y^3}$.

Ответ: 8.

Решение. $\dfrac{5x+y}{3x-y}=\dfrac{11}{5}$, $25x+5y=33x-11y$, поэтому $x=2y$ или $\dfrac{x}{y}=2$, откуда $\dfrac{x^3}{y^3}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=8$.

А9. (1 балл) Имеются отрезки длиной $4n$, $7n$ и 7. При каких целых n из этих отрезков можно составить треугольник? Если таких значений n несколько, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 3.

Решение. Из отрезков длиной $4n$, $7n$ и 7 наибольшим может быть либо отрезок длиной $7n$, либо отрезок длиной 7, поэтому из данных отрезков можно составить треугольник, если:

$$\begin{cases} 4n+7n>7, \\ 4n+7>7n. \end{cases}$$

Получаем, что $\dfrac{7}{11}<n<\dfrac{7}{3}$, поэтому $n=1$ или $n=2$. Сумма найденных значений равна 3.

А10. (1 балл) На координатной плоскости построены прямые $y=1+x$ и $y=2-x$, которые разбивают плоскость на 4 части. Занумеруем эти части против часовой стрелки, начиная с той, где лежит начало координат. В какой из частей лежит точка с координатами $(-2019;\ 2019)$?

Ответ: 4.

Решение. Точка с координатами $(-2019;\ 2019)$ лежит выше прямой $y=1+x$ и ниже прямой $y=2-x$.

Вступительная работа по математике в 8 класс. 7 апреля 2019 г.

Часть А

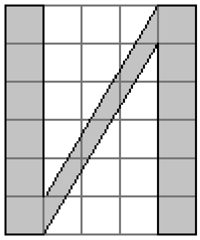
Вариант 2

А1. (1 балл) При каком значении n сумма выражений $3n+4$ и $8n+7$ на 15 меньше значения выражения $5-3n$?

А2. (1 балл) Найдите значение выражения

$$(3x+y)^2+(x-y)(y+x) \text{ при } x=\frac{3}{5},\ y=-1.$$

А3. (1 балл) Кусок сплава меди и цинка массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько килограммов меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?



А4. (1 балл) Вычислите: $\dfrac{(14^3)^3}{7^8\cdot 8^3}$.

А5. (1 балл) Площадь одной клеточки равна 1 см^2. Найдите площадь буквы *И* (см. рис.).

А6. (1 балл) На соревнованиях по гребле две лодки – «Тихоня» и «Резвая» должны проплыть по 600 м. Когда «Тихоня» добралась до финиша, увлекшиеся гребцы на «Резвой» проплыли лишних 300 м. На какое расстояние нужно пододвинуть место старта «Тихони», чтобы она финишировала одновременно с «Резвой»? Ответ дайте в метрах.

А7. (1 балл) В треугольнике PQR на стороне PQ отмечена точка A, а на стороне PR – точка B. Известно, что $AP=AB=BQ=BR$ и $\angle P=20^0$. Найдите $\angle R$.

А8. (1 балл) Известно, что $\dfrac{5x-3y}{2x+3y}=\dfrac{4}{3}$. Найдите $\dfrac{x^4}{y^4}$.

А9. (1 балл) Имеются отрезки длиной $5m$, $8m$ и 8. При каких целых m из этих отрезков можно составить треугольник? Если таких значений m несколько, в ответ запишите их сумму.

А10. (1 балл) На координатной плоскости построены прямые $y=x-1$ и $y=2-x$, которые разбивают плоскость на 4 части. Занумеруем эти части по часовой стрелке, начиная с той, где лежит начало координат. В какой из частей лежит точка с координатами $(2019;-2019)$?

Ответы на задания варианта 2

А1	А2	А3	А4	А5	А6	А7	А8	А9	А10
–1,5	0	13,5	7	15	200	60	81	3	4

Вступительная работа по математике в 8 класс. 7 апреля 2019 г.

Часть Б

Вариант 3

Б1. (2 балла) Вычислите: $158\cdot\left(\dfrac{12-\dfrac{12}{7}-\dfrac{12}{289}-\dfrac{12}{85}}{4-\dfrac{4}{7}-\dfrac{4}{289}-\dfrac{4}{85}}:\dfrac{5+\dfrac{5}{13}+\dfrac{5}{169}+\dfrac{5}{91}}{6+\dfrac{6}{13}+\dfrac{6}{169}+\dfrac{6}{91}}\right)\cdot\dfrac{505505505}{711711711}$.

Ответ: 404.

Решение.

$$158\cdot\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\frac{505505505}{711711711}=$$

$$=158\cdot\left(\frac{12\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}{4\cdot\left(1-\frac{1}{7}-\frac{1}{289}-\frac{1}{85}\right)}:\frac{5\cdot\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}{6\cdot\left(1+\frac{1}{13}+\frac{1}{169}+\frac{1}{91}\right)}\right)\cdot\frac{505\cdot1001001}{711\cdot1001001}=$$

$$158\cdot\left(\frac{12}{4}:\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{505}{711}=79\cdot2\cdot3\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5\cdot101}{9\cdot79}=404.$$

Б2. (3 балла) В пятизначном числе x, не делящемся на 10, убрали последнюю цифру и получили число y. Найдите наименьшее значение дроби $\dfrac{x}{y}$.

Ответ:.

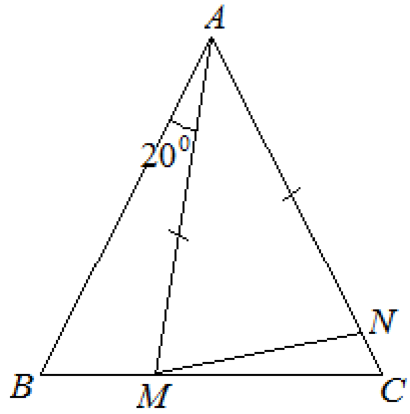
Решение. По условию, $x=10y+z$, где $z\neq0$ – последняя цифра числа x. Тогда $\dfrac{x}{y}=\dfrac{10y+z}{y}=10+\dfrac{z}{y}$, где $1\le z\le9$, $1000\le y\le9999$ (y – четырёхзначное число), значит наименьшее значение $\dfrac{x}{y}=10+\dfrac{1}{9999}$.

Б3. (3 балла) Дед и внук вышли одновременно навстречу друг другу и шли с постоянными скоростями. Внук шёл не останавливаясь, но в два раза медленнее деда. Дед же после каждых 2000 м отдыхал 30 минут. Через 3 часа они встретились ровно на середине пути, когда дед собирался в путь после очередного отдыха. Найдите начальное расстояние между дедом и внуком.

Ответ: 12 км.

Решение. Так как дед шёл в два раза быстрее, а прошёл до встречи такое же расстояние, что и внук, то он потратил на ходьбу в два раза меньше времени, т.е. $3:2=1$ ч 30 мин, следовательно, отдыхал он 1 ч 30 мин, значит, сделал 3 привала. Таким образом, дед прошёл 3 промежутка по 2 км. Половина пути – 6 км, весь путь – 12 км.

Б4. (3 балла) На основании BC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка M, а на его боковой стороне AC – точка N так, что $AM = AN$. Зная, что $\angle BAM = 20^0$, найдите величину $\angle CMN$.



Ответ: 10^0.

Решение. Пусть $\angle MAN = 2\alpha$, тогда $\angle AMN = \angle ANM = 90^0 - \alpha$, $\angle BAC = 2\alpha + 20^0$, $\angle ABC = 80^0 - \alpha$ (см. рис.). Для ΔMNC $\angle ANM$ является внешним, значит $\angle ANM = \angle CMN + \angle MCN$, значит $90^0 - \alpha = \angle CMN + 80^0 - \alpha$, откуда $\angle CMN = 10^0$.

Вступительная работа по математике в 8 класс. 7 апреля 2019 г.
Часть Б
Вариант 4

Б1. (2 балла) Вычислите: $122\cdot\left(\dfrac{15-\dfrac{15}{11}-\dfrac{15}{224}-\dfrac{15}{56}}{5-\dfrac{5}{11}-\dfrac{5}{224}-\dfrac{5}{56}}:\dfrac{7+\dfrac{7}{16}+\dfrac{7}{256}+\dfrac{7}{80}}{3+\dfrac{3}{16}+\dfrac{3}{256}+\dfrac{3}{80}}\right)\cdot\dfrac{707707707}{549549549}$.

Ответ: 202.

Решение.

$$122\cdot\left(\frac{15-\frac{15}{11}-\frac{15}{224}-\frac{15}{56}}{5-\frac{5}{11}-\frac{5}{224}-\frac{5}{56}}:\frac{7+\frac{7}{16}+\frac{7}{256}+\frac{7}{80}}{3+\frac{3}{16}+\frac{3}{256}+\frac{3}{80}}\right)\cdot\frac{707707707}{549549549}=$$

$$=122\cdot\left(\frac{15\cdot\left(1-\frac{1}{11}-\frac{1}{224}-\frac{1}{56}\right)}{5\cdot\left(1-\frac{1}{11}-\frac{1}{224}-\frac{1}{56}\right)}:\frac{7\cdot\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\frac{1}{80}\right)}{3\cdot\left(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\frac{1}{80}\right)}\right)\cdot\frac{707\cdot 1001001}{549\cdot 1001001}=$$

$$122\cdot\left(\frac{15}{5}:\frac{7}{3}\right)\cdot\frac{707}{549}=61\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{7\cdot 101}{9\cdot 61}=202.$$

Б2. (3 балла) В пятизначном числе x, не делящемся на 10, убрали последнюю цифру и получили число y. Найдите наибольшее значение дроби $\dfrac{x}{y}$.

Ответ:.

Решение. По условию, $x=10y+z$, где $z\neq 0$ – последняя цифра числа x. Тогда $\dfrac{x}{y}=\dfrac{10y+z}{y}=10+\dfrac{z}{y}$, где $1\le z\le 9$, $1000\le y\le 9999$ (y – четырёхзначное число), значит наибольшее значение $\dfrac{x}{y}=10+\dfrac{9}{1000}=10{,}009$.

Б3. (3 балла) Велосипедист и пешеход одновременно двинулись навстречу друг другу. Велосипедист ехал в три раза быстрее, чем шёл пешеход, но после каждых двух километров подкачивал по 30 минут колёса своего старого велосипеда. Пешеход же шёл без отдыха. Через 3 часа они встретились ровно на середине пути, когда велосипедист снова собрался подкачивать колёса. Найдите начальное расстояние между велосипедистом и пешеходом.

Ответ: 20 км.

Решение. Так как велосипедист ехал в три раза быстрее пешехода, а проехал до встречи такое же расстояние, что и прошёл пешеход, то он потратил на езду в три раза меньше времени, т.е. $3:3=1$ ч, следовательно, он подкачивал колёса велосипеда 2 часа, значит, сделал это 4 раза. Встретились велосипедист и пешеход в тот момент, когда велосипедист собрался подкачивать в очередной раз колеса велосипеда, поэтому он проехал на один отрезок пути больше, чем то, сколько раз он подкачивал колёса, то есть 5 отрезков пути. Таким образом, велосипедист проехал 5 промежутков по 2 км. Половина пути – 10 км, весь путь – 20 км.

Б4. (3 балла) На основании *PR* равнобедренного треугольника *KPR* отмечена точка *A*, а на его боковой стороне *KP* – точка *B* так, что $KA = KB$. Зная, что $\angle BAP = 30^0$, найдите величину $\angle RKA$.

Ответ: 60^0.

Решение. Пусть $\angle AKB = 2\alpha$, тогда

$\angle KAB = \angle KBA = 90^0 - \alpha$ (см. рис.).

Для ΔAKB $\angle ABP$ является внешним, значит

$\angle ABP = \angle AKB + \angle KBA = 90^0 - \alpha + 2\alpha = 90^0 + \alpha$.

$\angle KPA = \angle KRP = 180^0 - 30^0 - (90^0 + \alpha) = 60^0 - \alpha$.

$\angle RKP = 180^0 - 2(60^0 - \alpha) = 60^0 + 2\alpha$.

$\angle RKA = \angle RKP - \angle AKB = 60^0 + 2\alpha - 2\alpha = 60^0$.