

Вступительная работа по математике в 8 класс, 15 апреля 2018 г.

Вариант 1

1. Даны числа $A = \frac{36^3 \cdot 15^2}{18^4 \cdot 10^3}$ и $B = \frac{3^{48} - 3^{47} + 17 \cdot 3^{46}}{27^{15} \cdot 23}$. Найдите расстояние между точками, которые соответствуют числу, обратному числу A , и числу, противоположному числу B .

Решение.

$$A = \frac{36^3 \cdot 15^2}{18^4 \cdot 10^3} = \frac{36^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{18^4 \cdot 5^3 \cdot 2^3} = \frac{36^3 \cdot 5^2 \cdot 3^2}{36^3 \cdot 18 \cdot 5^3} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10};$$

$$B = \frac{3^{48} - 3^{47} + 17 \cdot 3^{46}}{27^{15} \cdot 23} = \frac{2 \cdot 3^{47} + 17 \cdot 3^{46}}{3^{45} \cdot 23} = \frac{23 \cdot 3^{46}}{3^{45} \cdot 23} = 3$$

$$\frac{1}{A} = 10; \quad -B = -3 \quad |10 - (-3)| = 13$$

2. Из данных четырёх чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{5} : \frac{1}{3} : \frac{1}{20}$, а четвёртое составляет 15% второго. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 8 больше суммы остальных.

Решение.

Пусть второе число равно x , тогда первое число равно $\frac{3}{5}x$, третье – $\frac{3}{20}x$, а четвёртое – $0,15x$, тогда

$$x = \frac{3}{5}x + \frac{3}{20}x + \frac{3}{20}x + 8,$$

$$\frac{1}{10}x = 8, \quad x = 80,$$

следовательно, числа равны соответственно 48, 80, 12, 12.

3. Надо застелить ковром пол в комнате, ширина которой на 1 м меньше длины. Если купить ковёр, длина и ширина которого на 50 см меньше длины и ширины комнаты, то он будет на 2550 руб. дешевле, чем ковёр, покрывающий весь пол. Найдите длину и ширину комнаты, если известно, что 1 м² ковра стоит 600 руб.

Решение.

Если ширина комнаты x м, то её длина $(x+1)$ м, а площадь $x(x+1)$ м². При этом ширина ковра равна $(x-0,5)$ м, а его площадь $(x-0,5)(x+0,5)$ м². Площадь пола, не покрытого ковром, составляет

$$x(x+1) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) = x^2 + x - x^2 + \frac{1}{4} = x + \frac{1}{4} \quad (\text{м}^2),$$

значит

$$600\left(x + \frac{1}{4}\right) = 2550$$

откуда $x=4$. Ширина комнаты равна 4 м, а её длина – 5 м.

4. Дан треугольник ABC с углами 30° , 70° и 80° соответственно. Внутри треугольника взята такая точка O , что $OA = OB = OC$. Найдите большие углы $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ и $\triangle OBC$.

Решение.

Если $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, то

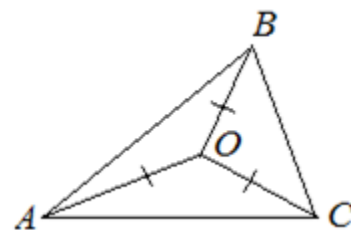
$$\angle OBA = \angle OAB = 70^\circ - \alpha, \text{ а}$$

$$\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ - (70^\circ - \alpha) = \alpha - 40^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = \alpha - 40^\circ + \alpha = 2\alpha - 40^\circ = 80^\circ, \text{ откуда } \alpha = 60^\circ. \text{ В}$$

$\triangle OBC$ все углы равны по 60° , в $\triangle OAB$ больший угол $\angle AOB = 160^\circ$, в

$\triangle OAC$ больший угол $\angle AOC = 140^\circ$.



5. В ближайшем магазине 1 кг гречки стоит 96 рублей. В более далёком магазине 1 кг гречки стоит 90 рублей, но проезд туда и обратно стоит 50 рублей. За каким наименьшим целым количеством килограммов гречки имеет смысл съездить в тот более далёкий магазин?

Решение.

На покупку x кг гречки в ближайшем магазине придётся потратить $96x$ руб., а покупка x кг гречки в далёком магазине обойдётся в $(90x + 50)$ руб.

$$96x > 90x + 50$$

если $x > \frac{50}{6} = 8\frac{2}{3}$. Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому условию, равно 9.

6. Число получено перемножением следующих чисел $93 \cdot 94 \cdot 95 \cdot \dots \cdot 162$.
Определите:

- самый большой простой делитель этого числа;
- наибольшую степень числа 5, на которую делится данное число;
- 15 последних цифр десятичной записи этого числа.

Решение.

а) самый большой простой делитель равен 157 (числа 158, 160 и 162 кратны 2; число 159 кратно 3; число 161 кратно 7);

б) выпишем все сомножители, кратные 5: 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160. Среди этих чисел 125 делится на 5^3 ; 100, 150 делятся на 5^2 , а остальные 11 – на 5. Это означает, что данное произведение делится на 5^{18} , но не делится на 5^{19} ;

в) как показано в п. б) среди делителей данного числа есть 5^{15} . Делитель 2 встречается чаще, чем делитель 5, значит среди делителей данного числа есть и 2^{15} . Это означает, что данное произведение делится на $2^{15} \cdot 5^{15} = 10^{15}$. Поэтому последние 15 цифр этого числа – нули.

Вариант 2

1. Даны числа $A = \frac{-14^2 \cdot 25^3}{49 \cdot (-10)^6}$ и $B = \frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{6^2 \cdot 49^{19}}$. Найдите расстояние между точками, которые соответствуют числу, обратному числу A , и числу, противоположному числу B .

Решение.

$$A = \frac{-14^2 \cdot 25^3}{49 \cdot (-10)^6} = -\frac{2^2 \cdot 7^2 \cdot 5^6}{7^2 \cdot 5^6 \cdot 2^6} = -\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{16};$$

$$B = \frac{7^{40} + 7^{38} - 2 \cdot 7^{39}}{6^2 \cdot 49^{19}} = \frac{7^{38}(49 + 1 - 14)}{7^{38} \cdot 6^2} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\frac{1}{A} = -16; \quad -B = -1 \quad | -16 - (-1) | = 15$$

2. Из данных четырёх чисел первые три относятся между собой как $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{7}$, а четвёртое составляет 25% второго. Найдите эти числа, если известно, что второе число на 24 меньше суммы остальных.

Решение.

Пусть второе число равно x , тогда первое число равно $\frac{3}{4}x$, третье – $\frac{3}{7}x$, а четвёртое – $0,25x$, тогда

$$x = \frac{3}{4}x + \frac{3}{7}x + \frac{1}{4}x - 24$$

$$\frac{3}{7}x = 24, \quad x = 56$$

следовательно, числа равны соответственно 42, 56, 24, 14.

3. Клумба имеет форму прямоугольника, ширина которого на 2 м меньше его длины. Она оформляется двумя видами цветов: по всей границе клумба окаймляется полосой из жёлтых бархатцев, ширина которой 0,5 м, а центральная её часть засаживается красными бархатцами. Найдите размеры клумбы, если жёлтых бархатцев понадобилось 140 штук, а на квадратный метр высаживается по 20 цветков.

Решение.

Пусть x – ширина клумбы, то $(x+2)$ – её длина, размеры участка, засаживаемого красными бархатцами, – $(x-1)$ м на $(x+1)$ м. Тогда площадь бордюра из жёлтых цветков равна

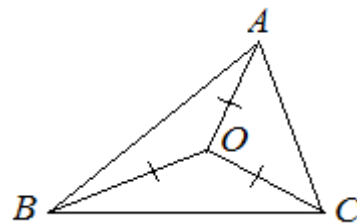
$$x(x+2) - (x-1)(x+1) = 2x+1$$

значит

$$20(2x+1)=140,$$

откуда $x=3$. Размеры клумбы: ширина 3 м, длина 5 м.

4. Дан треугольник ABC с углами 60° , 50° и 70° соответственно. Внутри треугольника взята такая точка O , что $OA = OB = OC$. Найдите большие углы $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ и $\triangle OBC$.



Решение.

Если $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$, то

$$\angle OBA = \angle OAB = 50^\circ - \alpha, \text{ а}$$

$$\angle OAC = \angle OCA = 60^\circ - (50^\circ - \alpha) = \alpha + 10^\circ, \text{ тогда}$$

$$\angle ACB = \angle OCA + \angle OCB = \alpha + 10^\circ + \alpha = 2\alpha + 10^\circ = 70^\circ, \text{ откуда } \alpha = 30^\circ. \text{ В}$$

$$\triangle OBC \text{ бóльший угол } \angle BOC = 120^\circ, \text{ в } \triangle OAB \text{ бóльший угол } \angle AOB = 140^\circ, \text{ в}$$

$$\triangle OAC \text{ бóльший угол } \angle AOC = 100^\circ.$$

5. В ближайшем магазине 1 кг риса стоит 85 рублей, а на продуктовой базе 1 кг риса стоит 80 рублей, но проезд на базу и обратно обходится в 52 рубля. За каким наименьшим целым количеством килограммов риса имеет смысл съездить на базу?

Решение.

На покупку x кг риса в ближайшем магазине придётся потратить $85x$ руб., а покупка x кг риса на базе обойдётся в $(80x+52)$ руб.

$$85x > 80x + 52,$$

если $x > \frac{52}{5} = 10 \frac{2}{5}$. Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому условию, равно 11.

6. Число получено перемножением следующих чисел $81 \cdot 82 \cdot 83 \cdot \dots \cdot 154$.
Определите:

- самый большой простой делитель этого числа;
- наибольшую степень числа 5, на которую делится данное число;
- 14 последних цифр десятичной записи этого числа.

Решение.

а) самый большой простой делитель равен 151 (числа 152, 154 кратны 2; число 153 делится на 3);

б) выпишем все сомножители, кратные 5: 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150. Среди этих чисел 125 делится на 5^3 ; 100, 150 делятся на 5^2 , а остальные 11 – на 5. Это означает, что данное произведение делится на 5^{18} , но не делится на 5^{19} .

в) как показано в п. б) среди делителей данного числа есть 5^{14} . Делитель 2 встречается чаще, чем делитель 5, значит среди делителей данного числа есть и 2^{14} .

Это означает, что данное произведение делится на $2^{14} \cdot 5^{14} = 10^{14}$. Поэтому последние 14 цифр этого числа – нули.