

8 класс
Часть А
Вариант 1

А1. Ужасный вирус уничтожает память компьютера. За первую секунду он управился с половиной памяти, за вторую – с $\frac{1}{3}$ оставшейся части, за третью секунду – с четвертью того, что ещё осталось. И тут его настиг могучий антивирус. Какая часть памяти (от исходного количества) уцелела?

Решение. После первой секунды осталось $\frac{1}{2}$ памяти, после второй –

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \text{ после третьей} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ответ. $\frac{1}{4}$.

А2. Вычислите: $\frac{(15 \cdot 3^8 - 9^5) \cdot 343}{4 \cdot 63^4}$.

Решение.
$$\frac{(15 \cdot 3^8 - 9^5) \cdot 343}{4 \cdot 63^4} = \frac{(5 \cdot 3^9 - 3^{10}) \cdot 7^3}{4 \cdot 9^4 \cdot 7^4} = \frac{3^9 \cdot (5 - 3) \cdot 7^3}{4 \cdot 3^8 \cdot 7^4} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 7} = \frac{3}{14}.$$

Ответ. $\frac{3}{14}$.

А3. Какой цифрой оканчивается сумма $146^{2020} + 14^6$?

Решение. 146^{2020} оканчивается на 6, 14^2 также оканчивается на 6, поэтому последней цифрой числа $14^6 = (14^2)^3$ также будет 6. Сумма оканчивается цифрой 2.

Ответ. 2.

А4. Решите уравнение $x^3 - 8 = 2x(2 - x)$. В ответе запишите сумму его корней.

Решение.

$$\begin{aligned} x^3 - 8 &= 2x(2 - x), \\ (x - 2)(x^2 + 2x + 4) - 2x(2 - x) &= 0, \\ (x - 2)(x^2 + 2x + 4) + 2x(x - 2) &= 0, \\ (x - 2)(x^2 + 2x + 4 + 2x) &= 0, \\ (x - 2)(x^2 + 4x + 4) &= 0, \\ (x - 2)(x + 2)^2 &= 0, \text{ откуда } x = 2 \text{ или } x = -2. \end{aligned}$$

Сумма корней равна 0.

Ответ. 0.

А5. Даже тогда, когда верблюд Гоша хочет пить, 84% его веса составляет вода. После того, как Гоша напьётся воды, его вес станет равным 800 кг, а

вода будет составлять 85% его веса. Сколько весит Гоша, когда испытывает жажду?

Решение. Сухого вещества в Гоше $100\% - 85\% = 15\%$ от 800 кг, т.е. $800 \text{ кг} \cdot 0,15 = 120 \text{ кг}$. Когда Гоша испытывает жажду, эти 120 кг составляют $100\% - 84\% = 16\%$ его веса, поэтому его вес в этот момент равен $\frac{120 \text{ кг}}{0,16} = 750 \text{ кг}$.

Ответ. 750.

А6. Даны два отрезка с длинами 5 и 2 см. Сколько различных треугольников можно составить с этими отрезками, если известно, что длина третьей стороны выражается целым числом сантиметров?

Решение. Пусть третья сторона треугольника равна x см. Треугольник можно составить только тогда, когда длины его сторон будут удовлетворять неравенству треугольника:

$$\begin{cases} x < 2 + 5, \\ 5 < 2 + x, \end{cases}$$

откуда $3 < x < 7$. Последнему неравенству удовлетворяют три целых числа: 4, 5 и 6. С указанными отрезками получится составить три разных треугольника.

Ответ. 3.

А7. Графики функций $y = 2x + 4$ и $y = k - x$ пересекаются в точке с ординатой 2. Найдите число k .

Решение. График функции $y = 2x + 4$ имеет ординату 2 в точке с абсциссой $x = -1$ ($(2 \cdot (-1) + 4 = 2)$). Точка $(-1; 2)$ лежит на графике функции $y = k - x$, значит $2 = k + 1$, откуда $k = 1$.

Ответ. 1.

А8. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC и $\angle ABC = 30^\circ$ провели высоту AH . Найдите её длину, если $BC = 6$.

Решение. В прямоугольном треугольнике ABH гипотенуза $AB = 6$, $\angle ABH = \angle ABC = 30^\circ$, поэтому $AH = \frac{1}{2} AB = 3$.

Ответ. 3.

А9. На день рождения Карлсону подарили мешок с конфетами: шоколадными и карамельками. Всего конфет в мешке было меньше 100, причём соотношение шоколадных и карамелек было 9:7. Карлсон сразу же съел 20% всех конфет, причём 25% из них составляли карамельки. Сколько карамелек осталось в мешке?

Решение. Поскольку в мешке соотношение шоколадных конфет и карамелек равно $9:7$, то общее число конфет в мешке должно делиться на 16. Кроме того, Карлсон съел 20% конфет, что составляет $\frac{1}{5}$ часть, а это означает делимость общего числа конфет ещё и на 5. Среди чисел от 1 до 100 единственное, которое делится на 16 и 5, – это 80. Карамелек среди них $\frac{7}{16} \cdot 80 = 35$. Съел Карлсон сразу 16 конфет, среди которых было $\frac{1}{4} \cdot 16 = 4$ карамельки. Таким образом, в мешке осталась $35 - 4 = 31$ карамелька.

Ответ. 31.

A10. Известно, что $f(x) = x^2 - 1$. Решите уравнение $f(x+1) = f(x-2)$.

Решение. $f(x+1) = (x+1)^2 - 1 = x^2 + 2x + 1 - 1 = x^2 + 2x$,

$$f(x-2) = (x-2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3,$$

следовательно, требуется решить уравнение

$$x^2 + 2x = x^2 + 4x + 3.$$

Решим его:

$$6x = 3,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$.

Ответы на задания варианта 1

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{14}$	2	0	750	3	1	3	31	$\frac{1}{2}$

8 класс
Часть А
2 вариант

А1. Оля пришла из школы в ужасном настроении и съела $\frac{1}{6}$ часть конфет, лежащих в вазе. Затем пришла следящая за своим видом Женя и съела $\frac{1}{5}$ часть оставшихся конфет. Последним пришёл скромный Сергей и съел половину того, что ещё оставалось. Какая часть конфет (от исходного количества) уцелела?

Ответ. $\frac{1}{3}$.

А2. Вычислите: $\frac{(15 \cdot 5^8 - 25^4) \cdot 256}{4 \cdot 10^{10}}$.

Ответ. $\frac{7}{200}$.

А3. Какой цифрой оканчивается сумма $146^{2019} + 2019^{146}$?

Ответ. 7.

А4. Решите уравнение $x^3 + 8 = 2x(x + 2)$. В ответе запишите сумму его корней.

Ответ. 0.

А5. Тело белого медведя Чарли на 65% состоит из воды. Во время купания шерсть намокает, после чего вода составляет 72% веса Чарли, а сам Чарли весит 700 кг. Какой вес был у Чарли до купания?

Ответ. 560.

А6. Даны два отрезка с длинами 7 и 3 см. Сколько различных треугольников можно составить с этими отрезками, если известно, что длина третьей стороны выражается целым числом сантиметров?

Ответ. 5.

А7. Графики функций $y = x - 4$ и $y = k - 2x$ пересекаются в точке с ординатой -2 . Найдите число k .

Ответ. 2.

А8. В равнобедренном треугольнике PQR с основанием PR высота $RT = 7$. Найдите $\angle PQR$, если $PQ = 14$.

Ответ. 30° .

А9. На день рождения Карлсону подарили мешок с конфетами: шоколадными и карамельками. Всего конфет в мешке было меньше 100, причём соотношение шоколадных и карамелек было $9:7$. Карлсон сразу же

съел 25% всех конфет, причём 20% из них составляли карамельки. Сколько карамелек осталось в мешке?

Ответ. 29.

A10. Известно, что $f(x) = x^2 + 1$. Решите уравнение $f(x - 4) = f(x) - 4$.

Ответ. $\frac{5}{2}$.

Ответы на задания варианта 2

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{200}$	7	0	560	5	2	30	31	$\frac{5}{2}$

8 класс
Часть Б
Вариант 3

Б1. Решите уравнение

$$1+1:(1+1:(1+1:(x+30)))=(1,25)^2.$$

Решение. $1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+30}}}=\left(\frac{5}{4}\right)^2.$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+30}}}=\frac{9}{16}, \quad 1+\frac{1}{1+\frac{1}{x+30}}=\frac{16}{9}, \quad \frac{1}{1+\frac{1}{x+30}}=\frac{7}{9}, \quad 1+\frac{1}{x+30}=\frac{9}{7},$$

$$\frac{1}{x+30}=\frac{2}{7}, \quad x+30=\frac{7}{2}, \quad x=-26,5.$$

Ответ. $-26,5.$

Б2. В 8 «Я» классе провели опрос. Выяснилось, что 10% учеников, интересующихся физикой, интересуются ещё и астрономией, а 50% учащихся, интересующихся астрономией, интересуются также и физикой. И только Васе, Пете и Ане не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек учится в 8 «Я» классе, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Решение. Пусть n учащихся интересуются одновременно и физикой, и астрономией. Тогда $10n$ человек занимаются физикой, $2n$ – астрономией. Всего же в 8 «Я» $10n+2n-n+3=11n+3$ учеников.

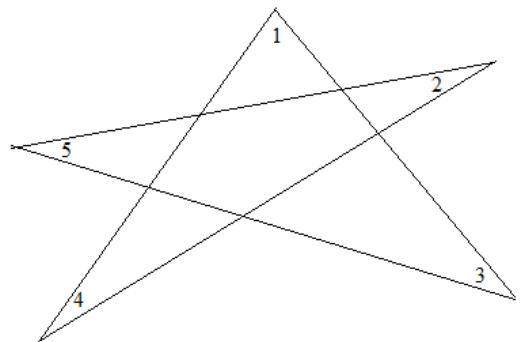
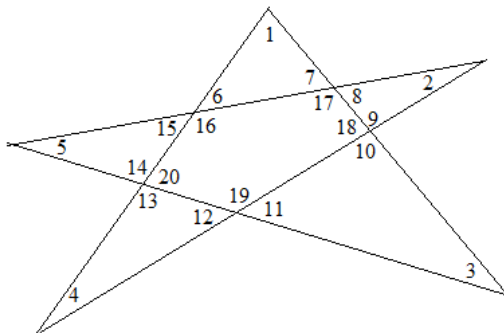
$20 < 11n+3 < 30$, значит $17 < 11n < 27$, откуда $n=2$. В 8 «Я» 25 учеников.

Ответ. 25.

Б3. Какова сумма углов

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$? (см. рис.)

Решение.



$\angle 6 = \angle 15$, $\angle 7 = \angle 8$, $\angle 9 = \angle 10$, $\angle 11 = \angle 12$, $\angle 13 = \angle 14$ как вертикальные, поэтому искомая сумма

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 5 \cdot 180^\circ - 2(\angle 6 + \angle 7 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13).$$

$\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 9$, $\angle 11$, $\angle 13$ – смежные с углами пятиугольника, значит

$$\angle 6 + \angle 7 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13 = 900^\circ - 180^\circ \cdot (5 - 2) = 360^\circ, \text{ а}$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 900^\circ - 720^\circ = 180^\circ.$$

Ответ. 180° .

Б4. На прогулку вышла колонна туристов длиной 1200 м во главе с Мироном, которая движется с постоянной скоростью 6 км/ч. Из конца колонны в её начало бежит инструктор Юрий со скоростью 9 км/ч. Передав указание Миرونу, Юрий с той же скоростью возвращается назад в конец колонны. Какое расстояние (в километрах) пробежит Юрий?

Решение. Поскольку сперва Юрий бежит по ходу движения колонны, скорость, с которой он догоняет Мирона, равна $9 - 6 = 3$ км/ч, поэтому догонит Мирона Юрий за $1,2 : 3 = 0,4$ часа.

При движении обратно Юрий возвращается в конец колонны со скоростью $9 + 6 = 15$ км/ч, поэтому достигнет цели за $1,2 : 15 = 0,08$ часа.

Всего Юрий пробежит

$$9 \cdot (0,4 + 0,08) = 9 \cdot 0,48 = 4,32 \text{ км.}$$

Ответ. 4,32.

8 класс
Часть Б
Вариант 4

Б1. Решите уравнение

$$1 + 1 : (1 + 1 : (1 + 1 : (x + 20))) = (1,2)^2.$$

Решение. $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x + 20}}} = \left(\frac{6}{5}\right)^2.$

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x + 20}}} = \frac{11}{25}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x + 20}} = \frac{25}{11}, \quad \frac{1}{1 + \frac{1}{x + 20}} = \frac{14}{11}, \quad 1 + \frac{1}{x + 20} = \frac{11}{14},$$

$$\frac{1}{x + 20} = \frac{-3}{14}, \quad x + 20 = -\frac{14}{3}, \quad x = -\frac{74}{3}.$$

Ответ. $-24\frac{2}{3}$.

Б2. В 8 «Я» классе провели опрос. Выяснилось, что 25% учеников, интересующихся математикой, интересуются ещё и информатикой, а 20% учащихся, интересующихся информатикой, интересуются также и математикой. И только двоечнику Вовочке не интересен ни один из этих предметов. Сколько человек учится в 8 «Я» классе, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Решение. Пусть n учащихся интересуются одновременно и математикой, и информатикой. Тогда $4n$ человек занимаются математикой, $5n$ – информатикой. Всего же в 8 «Я» $4n + 5n - n + 1 = 8n + 1$ учеников.

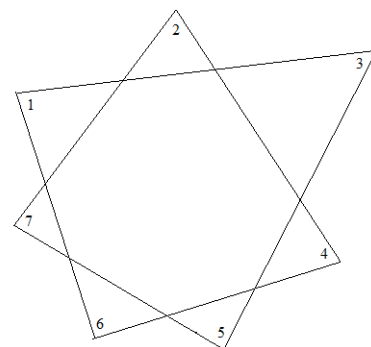
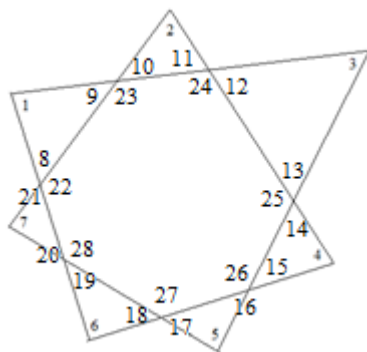
$20 < 8n + 1 < 30$, значит $19 < 8n < 29$, откуда $n = 3$. В 8 «Я» 25 учеников.

Ответ. 25.

Б3. Какова сумма углов

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7?$$

(см. рис.)



Решение.

$$\angle 8 = \angle 21, \quad \angle 9 = \angle 10, \quad \angle 11 = \angle 12, \quad \angle 13 = \angle 14, \\ \angle 15 = \angle 16, \quad \angle 17 = \angle 18, \quad \angle 19 = \angle 20$$

как вертикальные, поэтому искомая сумма

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 =$$

$$= 7 \cdot 180^\circ - 2(\angle 8 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13 + \angle 15 + \angle 17 + \angle 19).$$

$\angle 8, \angle 9, \angle 11, \angle 13, \angle 15, \angle 17, \angle 19$ – смежные с углами семиугольника, значит

$$\angle 8 + \angle 9 + \angle 11 + \angle 13 + \angle 15 + \angle 17 + \angle 19 = 180^\circ \cdot 7 - 180^\circ \cdot (7 - 2) = 360^\circ, \text{ а}$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 1260^\circ - 720^\circ = 540^\circ.$$

Ответ. 540° .

Б4. На военном параде движется колонна солдат длиной 500 м со скоростью 5 км/ч. Из конца колонны в её начало с донесением отправляется связной со скоростью 7 км/ч. Передав донесение командиру, он с той же скоростью возвращается назад в конец колонны. Какое расстояние (в километрах) пробежит связной?

Решение. Поскольку сперва связной бежит по ходу движения колонны, скорость, с которой он догоняет командира, равна $7 - 5 = 2$ км/ч, поэтому догонит командира связной за $0,5 : 2 = 0,25$ часа.

При движении обратно связной догоняет конец колонны со скоростью $7 + 5 = 12$ км/ч, поэтому достигнет цели за $0,5 : 1 = \frac{1}{24}$ часа.

Всего связной пробежит

$$7 \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{24} \right) = 7 \cdot \frac{7}{24} = \frac{49}{24} \text{ км.}$$

Ответ. $2\frac{1}{24}$ км.