XIV Городская олимпиада по математике. 3 марта 2024 г. 7 класс. Решения. Критерии.

Все задачи оцениваются в 7 баллов.

1. Петя написал на доске семизначное число, делящееся на 18 и на 24. Петя стер одну цифру, после чего на доске осталось число 146146. Какое число могло быть написано изначально? Найдите все варианты.

Ответ: 1461456

Решение: $18=2*3^2$, $24=3*2^3$. Чтобы число делилось на 18 и 24 необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на $2^3 = 8$ и $3^2 = 9$. По признаку делимости на 9, сумма цифр должна делиться на 9. 1+4+6+1+4+6 = 22 не делится на 9. Ближайшее большее число, делящееся на 9 это 27. Значит, стертой цифрой могла быть цифра 5. А до следующей подходящей суммы не хватает 5+9=14, что уже не является цифрой. По признаку делимости на 8 необходимо, чтобы число, образованное последними тремя цифрами делилось на 8. 146 на 8 не делится, значит, вычеркнута одна из 3 последних цифр. Тогда в конце могли быть цифры 465, 456 или 546. Из этих вариантов на 8 делится только 456. Таким образом, Петя мог написать только 1461456.

Критерии оценивания:

А1 Только найден верный ответ – 1 балл;

А2 Найден верный ответ и доказано, что он подходит (либо верно найдено, что 1461456/18=81192 и 1461456/24=60894 либо доказано по признакам делимости) – 2 балла;

Пункты А1 и А2 не суммируются.

Б1 Обосновано, что требуемые делимости равносильны делимости на 72 – 1 балл;

Б2 Обосновано, что требуемые делимости равносильны делимости на 8 и на 9 – 2 балла;

Б3 Обосновано, что из условия следует делимость на 8 и на 9, но нет равносильности – 1 балл;

Пункты Б1, Б2 и Б3 не суммируются.

В1 Доказано, что вычеркнута цифра «5» – 1 балл.

Доказано, что кроме 1461456 ничего не подходит, но проверка не выполнена (или выполнена при помощи признаков делимости на 8 и 9, но не доказана их равносильность условию задачи) – баллы не снимаются.

2. Заполните клетки квадрата 3х3 девятью различными цифрами так, чтобы среди сумм цифр во всех строках, во всех столбцах и на обеих диагоналях (всего 8 сумм) не было одинаковых.

Ответ: Например, так

1	2	3
8	9	4
7	6	5

По горизонталям суммы равны 6, 21, 18. По вертикалям – 16, 17, 12. По диагоналям – 15 и 19. Существуют и другие варианты.

Комментарий: В решении не запрещено использовать цифру 0.

Критерии оценивания:

Предъявлена таблица, в которой есть одинаковые цифры – 0 баллов.

Предъявлена таблица, в которой среди искомых сумм есть одинаковые – 0 баллов.

Предъявлена таблица, в которой все 9 цифр различны и все 8 искомых сумм различны – 7 баллов.

Если при верном примере искомые суммы не вычислены или вычислены с ошибками, то баллы не снимаются.

3. В деревне рыцарей и лжецов живет 2024 жителя, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Первый житель сказал: «В деревне живет, по крайней мере, один блондин». Второй житель сказал: «В деревне живут, по крайней мере, два

блондина». Каждый следующий житель называл число на 1 больше предыдущего. Последний житель сказал: «В деревне живут, по крайней мере, 2024 блондина». Известно, что среди блондинов только треть – рыцари, а среди остальных только пятая часть – лжецы. Сколько в деревне блондинов?

Ответ: 1104.

Решение: Пусть блондинов в деревне x. Тогда первые x человек сказали правду, а остальные солгали. Значит рыцарей столько же, сколько и блондинов. Всего правду сказали 1/3 всех блондинов и 4/5 всех остальных. Получаем уравнение $x = x*1/3 + (2024- x)*4/5$.

Критерии оценивания:

Предъявлен верный ответ – 2 балла

Замечено, что количество рыцарей равно количеству блондинов, но дальнейшие продвижения отсутствуют – 1 балл.

Обоснованно получено верное уравнение, из которого может быть найдено количество блондинов (или не блондинов или рыцарей или лжецов), но дальнейшие продвижения отсутствуют или при решении уравнения допущена ошибка в преобразованиях или более одной арифметической ошибки – 3 балла.

Обоснованно получено верное уравнение, из которого может быть найдено количество блондинов (или не блондинов или рыцарей или лжецов), но при решении допущено не более 1 арифметической ошибки, приведшей к неверному ответу – 5 баллов

4. На сторонах AB и BC прямоугольника ABCD во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники ABE и BCF. Найдите угол EDF, если известно, что угол AFD равен 40^o.

Решение: Т.к. углы равностороннего треугольника равны по 60^o, то углы EAD и DCF равны по $90^o+60^o=150^o$. Угол EBF равен $360^o-90^o-60^o-60^o=150^o$. Тогда треугольники EAD, DCF и EBF равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, отрезки ED, DF и EF равны, как соответственные стороны равных треугольников. Поскольку треугольник EDF равносторонний, то угол EDF = 60^o.

Критерии оценивания:

Доказано, равенство треугольников EAD и DCF или отрезков ED и DF или углов EFD и DEF, но другие продвижения отсутствуют – 2 балла.

Доказано, равенство треугольника EBF одному из треугольников EAD и DCF или равенство отрезка EF одному из отрезков ED и DF или равенство угла EDF одному из углов EFD и DEF, но другие продвижения отсутствуют – 3 балла.

5. В классе учатся 25 школьников. У каждого мальчика среди его одноклассников друзей на одного больше чем подруг. У каждой девочки среди ее одноклассников подруг на одну больше, чем друзей. Могут ли в этом классе все дружбы быть взаимными?

Решение: У каждого школьника количество тех с кем он дружит – сумма двух соседних чисел, а значит это количество нечетно. Если каждый из 25 человек дружит с нечетным количеством одноклассников, то сумма количества друзей всех 25 человек так же нечетна. Если бы все дружбы были взаимными, то каждая дружба была бы посчитана 2 раза и сумма была бы четной. Следовательно, должна быть хотя бы одна невзаимная дружба.

Критерии оценивания:

Обосновано, что каждый ученик дружит с нечетным количеством одноклассников, но дальнейших продвижение нет – 3 балла.

В предположении, что у всех мальчиков количество друзей одинаково и/или у всех девочек количество друзей одинаково, получено, что количество пар друзей не целое (или аналогичное противоречие) – 2 балла.