Вступительная работа в 10 класс МАОУ «СОШ № 146»
20 июня 2017 г.

1. а) вычислите:

$$(-0,5)^{-3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}-\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{0,5}\right)^{0}+16^{\frac{3}{4}}\cdot 0,5.$$

Решение.

$$(-0,5)^{-3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3}-\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{0,5}\right)^{0}+16^{\frac{3}{4}}\cdot 0.5=-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}-\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}-1+\left(2^{4}\right)^{\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=-2^{3}-\frac{5}{2}-1+2^{3}\cdot\frac{1}{2}=-8-2.5+3=-7.5.$$

б) Упростите выражение:

$$\left(\frac{a^{2}+4}{a^{3}+2\sqrt{2}}-\frac{1}{a+\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a^{2}}{\sqrt{2}}-a+\sqrt{2}\right)^{-1}.$$

Решение.

$$\left(\frac{a^{2}+4}{a^{3}+2\sqrt{2}}-\frac{1}{a+\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a^{2}}{\sqrt{2}}-a+\sqrt{2}\right)^{-1}=\left(\frac{a^{2}+4}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^{2}-\sqrt{2}a+2\right)}-\frac{1}{a+\sqrt{2}}\right):\left(\frac{a^{2}-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{a^{2}+4-\left(a^{2}-\sqrt{2}a+2\right)}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^{2}-\sqrt{2}a+2\right)}\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{a^{2}-\sqrt{2}a+2}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}a+2}{\left(a+\sqrt{2}\right)\left(a^{2}-\sqrt{2}a+2\right)}\right)\cdot\left(\frac{a^{2}-\sqrt{2}a+2}{\sqrt{2}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1.$$

2. а) решите уравнение:

$$\left(\frac{x^{2}-3x+2}{x}\right)^{2}-x=\frac{2-3x}{x}.$$

Решение.

$$\left(\frac{x^{2}-3x+2}{x}\right)^{2}-x=\frac{2-3x}{x}.$$

Запишем данное уравнение в виде:

$$\left(\frac{x^{2}-3x+2}{x}\right)^{2}=\frac{x^{2}+2-3x}{x}.$$

Пусть $\frac{x^{2}-3x+2}{x}=y$, тогда

$y^{2}=y$, откуда $y=0$ или $y=1$. Получаем:

$\frac{x^{2}-3x+2}{x}=0$ или $\frac{x^{2}-3x+2}{x}=1$. Из первого уравнения $x_{1}=1$, $x_{2}=2$. Второе уравнение $\frac{x^{2}-3x+2}{x}=1$ также имеет два корня: $x_{3}=2+\sqrt{2}$ и $x_{4}=2-\sqrt{2}$.

б) решите неравенство:

$$\frac{\left(x^{2}-4x+4\right)\left(9-x^{2}\right)}{x^{2}+8x+16}\leq 0.$$

Решение.

$$\frac{(x^2-4x+4)(9-x^2)}{x^2+8x+16}\le 0.$$

Запишем данное неравенство в виде:

$$\frac{(x-2)^2(3-x)(3+x)}{(x+4)^2}\le 0.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(3-x)(3+x)}{(x+4)^2}$.

Нули функции $f(x)$: $x=2$, $x=3$, $x=-3$.

Точка разрыва функции $f(x)$: $x=-4$.

Отметим данные числа на числовой оси и расставим знаки на полученных промежутках:

на промежутке $(-\infty;-4)$ функция $f(x)$ отрицательна;

на промежутке $(-4;-3)$ функция $f(x)$ отрицательна;

на промежутке $(-3;\,2)$ функция $f(x)$ положительна;

на промежутке $(2;\,3)$ функция $f(x)$ положительна;

на промежутке $(3;+\infty)$ функция $f(x)$ отрицательна.

Кроме этого, $f(2)=0$, $f(-3)=0$, $f(3)=0$.

Итак, решение неравенства: $x\in(-\infty;-4)\cup(-4;-3]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$.

3.

а) Острый угол прямоугольного треугольника равен 24°. Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла.

Решение.

Пусть в ΔABC угол C – прямой, $\angle B = 24^\circ$, CH – высота, CM – медиана. Тогда медиана $CM=\frac{1}{2}AB$, поэтому ΔBCM – равнобедренный, $\angle BCM = 24^\circ$, $\angle HCA=\angle B = 24^\circ$, поэтому $\angle MCH = 42^\circ$.

б) Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен 5 см, а высота, проведённая к основанию, равна 8 см. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Пусть в ΔABC $AB=BC$, BH – высота, проведённая к основанию AC, O – центр окружности, описанной около ΔABC. Тогда O лежит на BH, $BO=5$, значит, $OH=3$. Из прямоугольного треугольника AOH находим $AH=4$, поэтому $AC=8$. Площадь ΔABC равна $\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8=32$ (см).

4. Из города одновременно и в одном направлении выехали «Рено» и «Тойота». Через час в том же направлении выехал «Мерседес». Ещё через час расстояние между «Тойотой» и «Мерседесом» сократилось в 1,5 раза, а между «Рено» и «Мерседесом» – в 2 раза. Найти отношение скоростей «Тойоты» и «Рено», если известно, что оно больше 1,5.

Решение.

Пусть x, y и z – скорости (в км/ч) «Тойоты», «Рено» и «Мерседеса» соответственно. Через час расстояние между «Тойотой» и «Мерседесом» стало равным x км, между «Рено» и «Мерседесом» – y км. Ещё через час эти расстояния стали равными соответственно

$$|2x-z| \text{ км и } |2y-z| \text{ км.}$$

По условию,

$$\begin{cases}1{,}5|2x-z|=x,\\ 2|2y-z|=y.\end{cases}$$

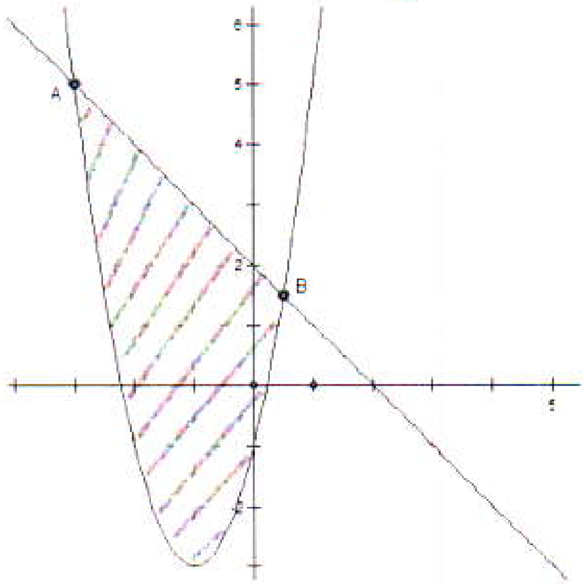
Решая полученную систему относительно $\frac{x}{y}$, находим:

$\frac{x}{y}=\frac{9}{8}$; $\frac{x}{y}=\frac{15}{8}$; $\frac{x}{y}=\frac{9}{16}$; $\frac{x}{y}=\frac{15}{16}$.

Последнему условию задачи удовлетворяет лишь второе отношение, значит, $\frac{x}{y}=\frac{15}{8}$.

5. Изобразите на координатной плоскости область, задаваемую неравенствами $y\ge 2x^2+4x-1$ и $x+y\le 2$, и аналитически найдите такое p, при котором отрезок прямой $x=p$, лежащий в построенной области, имеет наибольшую длину.

Решение. На рисунке изображена область, задаваемая неравенствами $y\ge 2x^2+4x-1$ и $x+y\le 2$. Точки $A(-3;5)$ и $B\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ – точки пересечения параболы $y=2x^2+4x-1$ и прямой $y=2-x$. Длина отрезка прямой $x=p$, лежащего в построенной области, $l=2-p-2p^2-4p+1=-2p^2-5p+3$, где $p\in\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.



Найдём, в какой точке p функция $l(p)$ принимает наибольшее значение на отрезке $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.

$$l=-2p^2-5p+3=-2\left(p^2+\frac{5}{2}p-\frac{3}{2}\right)=-2\left(p^2+\frac{5}{2}p+\frac{25}{16}-\frac{3}{2}-\frac{25}{16}\right)=-2\left(p+\frac{5}{4}\right)^2+\frac{49}{8}.$$

График данной функции – парабола, абсцисса вершины которой находится в точке $p=-\frac{5}{4}$, то есть принадлежит отрезку $\left[-3;\frac{1}{2}\right]$.

При данном значении p отрезок прямой $x=p$, лежащий в построенной области, имеет наибольшую длину, равную $\frac{49}{8}$.